Թեմա 1

Ենթաբազմության վրա մակածված տոպոլոգիան և նրա հատկությունները: Տոպոլոգիական տարածության ենթատարածության հասկացությունը, օրինակներ: Անվերջ չափականության մետրիկային տարածություններ:

Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն և $A \subset X$ ոչ դատարկ ենթաբազմություն: Այդ ենթաբազմությունը վերածվում է տոպոլոգիական տարածության, որի τ_A տոպոլոգիան կազմվում է A-ի այն բոլոր ենթաբազմություններով, որոնք ստացվում են A-ի հետ X-ում բաց բոլոր U_i ենթաբազմությունների հատումներից՝ $\tau_A = \{U_i \cap A \mid U_i \in \tau\}$:

Այսպիսով, **ըստ սահմանման**, A բազմությունում բաց ենթաբազմություններ են համարվում X-ում բաց բազմությունների հատումները A-ի հետ:

Ցույց տանք, որ τ_A-ի համար տոպոլոգիայի 1-3 աքսիոմները բավարարվում են: Իրոք,

1. $\varnothing \cap A = \varnothing,\ X \cap A = A$, ուստի $\varnothing$-ը և A-ն պատկանում են τ_A-ին:
2. Քանի որ $\bigcup\limits_i (U_i \cap A) = \left(\bigcup\limits_i U_i\right) \cap A$, ուստի τ_A-ի ցանկացած քանակով $U_i \cap A$ տարրերի միավորումը (որտեղ $U_i \in \tau$) նույնպես պատկանում է τ_A-ին:
3. Քանի որ $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (U_i \cap A) = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i\right) \cap A$, ուստի հատման աքսիոմը ևս տեղի ունի:

Սահմանում: τ_A տոպոլոգիան կոչվում է τ տոպոլոգիայից **մակածված տոպոլոգիա** A ենթաբազմության վրա: Իսկ ինքը՝ (A, τ_A) տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է (X, τ) **տոպոլոգիական տարածության ենթատարածություն**:

Մասնավոր $A = X$ դեպքում $\tau_A = \tau$, և ունենք $(A, \tau_A) = (X, \tau)$ նույնացում:

Սահմանումից հետևում է, որ (A, τ_A) տարածության փակ ենթաբազմությունները նույնպես ստացվում են A-ի հետ X-ում փակ ենթաբազմությունների հատումներով:

Մակածված տոպոլոգիայի հատկություններ:

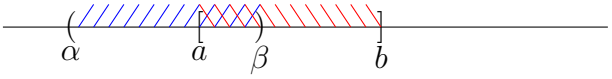
Հատկություն 1: Ունենք (X, τ) տոպ. տարածություն, $A \subset B \subset X$ ենթաբազմություններ: A ենթաբազմության վրա կարելի է մակածել երկու տոպոլոգիա՝ τ_A (անմիջականորեն τ-ից A-ի վրա) և $(\tau_B)_A$ տոպոլոգիա (նախ τ-ից մակածվում է τ_B տոպոլոգիա B-ի վրա, ապա τ_B-ից մակածվում է տոպոլոգիա A-ի վրա՝ $(\tau_B)_A$): Հետևյալ ակնհայտ $U \cap A = (U \cap B) \cap A$ համընկման շնորհիվ τ_A և $(\tau_B)_A$ տոպոլոգիաները նույնն են:

Հատկություն 2: Եթե $\{V_i, i \in I\}$ ընտանիքը բազա է τ տոպոլոգիայի համար, ապա $\{V_i \cap A, i \in I\}$ ընտանիքը բազա է τ_A-ի համար (հիմնավորե՛ք):

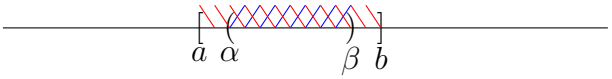
Եթե $\{U_j(x);\ j \in J\}$ ընտանիքը $x \in A$ կետի շրջակայքերի բազա է (X, τ) տարածությունում, ապա $\{U_j(x) \cap A;\ j \in J\}$ ընտանիքը x կետի շրջակայքերի բազա է (A, τ_A) տարածությունում (հիմնավորե՛ք):

Օրինակ 1: $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ տարածության $A = [a, b]$ ենթաբազմության τ_A տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում հետևյալ երեք տեսքերի ենթաբազմությունները, որոնք գոյանում են ինտերվալների $(\alpha, \beta) \cap A$ հատումներով.

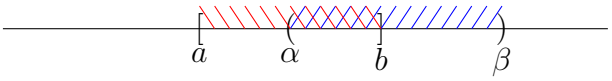
ա) $[a, \beta)$, որտեղ $a < \beta \leq b$



բ) (α, β), որտեղ $a \leq \alpha < \beta \leq b$



գ) $(\alpha, b]$, որտեղ $a \leq \alpha < b$



Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ ենթատարածության բաց բազմությունները կարող են բաց չլինել ընդգրկող տարածությունում: Նկատենք նաև, որ տվյալ (A, τ_A) ենթատարածությունում փակ են $[a, b]$-ի այն և միայն այն ենթաբազմությունները, որոնք փակ են նաև $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ ընդգրկող տարածությունում:

Օրինակ 2: $B = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ տոպոլոգիական տարածությունում (որպես $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ տարածության ենթատարածություն) բաց են բոլոր (α, β), $0 \leq a < \beta \leq 1$ տեսքի ինտերվալներն ու նրանց միավորումները (այսինքն տվյալ ենթատարածության բաց բազմությունները բաց են նաև ընդգրկող տարածությունում): Նկատենք նաև, որ $(0, 1)$-ում փակ են $(0, \beta]$, $0 < \beta < 1$ և $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < 1$; $[\alpha, 1), 0 < \alpha < 1$ տեսքերի ենթաբազմություններն ու նրանց վերջավոր միավորումները: Ուստի $(0, 1)$-ում փակ որոշ ենթաբազմություններ փակ չեն ընդգրկող $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ տարածությունում:

Ընդհանուր դեպքում, ենթատարածությունում բաց որևէ ենթաբազմություն կարող է չլինել բաց ենթաբազմություն ընդգրկող տարածությունում և ենթատարածությունում փակ որևէ ենթաբազմություն կարող է փակ չլինել ընդգրկող տարածությունում: Ընթերցողին առաջարկում ենք որպես օգտակար վարժանք քննարկել (նկարագրել) բաց և փակ ենթաբազմությունները $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ տարածության $[0, 1)$ և $(0, 1]$ ենթատարածություններում:

Թեորեմ 1: Ունենք (X, τ) տոպ. տարածություն և $A \subset X$ ենթաբազմություն: Ապա հետևյալ երկու պնդումները համարժեք են միմյանց.

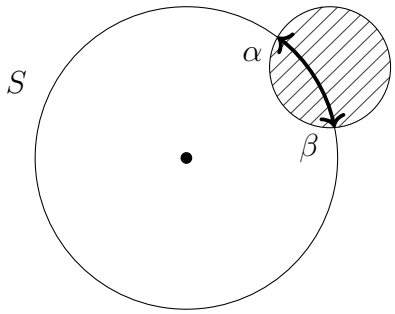
1. (A, τ_A) ենթատարածության կամայական բաց ենթաբազմություն, բաց ենթաբազմություն է նաև (X, τ) ընդգրկող տարածությունում:

2. A-ն բաց ենթաբազմություն է X-ում:

Նշենք, որ նմանակ պնդում տեղի ունի նաև փակ ենթաբազմությունների դեպքում. հարկավոր է թեորեմ 1-ի ձևակերպման մեջ ամենուրեք «բաց ենթաբազմություն» բառակապակցությունը փոխարինել «փակ ենթաբազմություն»-ով:

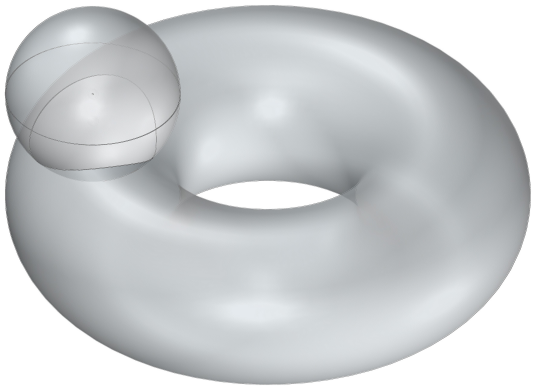
Ապացուցում: Ցույց տանք $1 \Rightarrow 2$ անցումը: Քանի որ A-ն բաց ենթաբազմություն է (A, τ_A) տարածությունում, ուստի 1-ից հետևում է, որ A-ն բաց ենթաբազմություն է նաև X-ում: Այժմ հակառակը. դիցուք A-ն բաց է ենթաբազմության X-ում: Դիտարկենք կամայական V բաց բազմություն A-ում: Ըստ τ_A-ի սահմանման $\exists U \in \tau$, որ $V = U \cap A$: Ուստի V-ն բաց է X-ում՝ որպես X-ում բաց երկու ենթաբազմությունների հատում: ■

Օրինակ 3: Դիտարկենք որևէ S շրջանագիծ $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունում:



Քանի որ $\mathbb{R}^2$-ի մետրիկային տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում անեզր շրջանները, ուստի (համաձայն հատկություն 1-ի) S-ի վրա մակածված տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում շրջանագծի բոլոր անեզր α, β ծայրակետերով աղեղները:

Օրինակ 4: ($\mathbb{R}^3$, սովոր. մետր. տոպ.) տարածությունում դիտարկենք T^2 տորը (մակերևույթ, որն առաջանում է շրջանագիծն իրեն չհատող ուղղի շուրջ պտտության մեջ պտտումով (տե՛ս նաև թեմա 2-ում): Այս մակերևույթի վրա $\mathbb{R}^3$-ից մակածված տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում նրա հատումները անեզր գնդերի հետ:



Օրինակ 5: Դիտարկենք ($\mathbb{R}^{n+1}$, սովոր. մետր. տոպ.) տարածության $S^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mid \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}$ ենթաբազմությունը (այն կոչվում է $\mathbb{R}^{n+1}$ էվկլիդյան տարածության n-չափականության սֆերա): Կարելի է S^n-ի վրա մակածել տոպոլոգիա $\mathbb{R}^{n+1}$-ի մետրիկային տոպոլոգիայից. նրա համար բազա են կազմում S^n-ի հատումները $\mathbb{R}^{n+1}$-ի $n+1$ չափականության անեզր գնդերի հետ: Այս օրինակը կարելի է դիտել որպես օրինակ 3-ի ընդհանրացում:

Օրինակ 6: $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածությունը կարելի է դիտել որպես $\mathbb{R}^{n+1}$ էվկլիդյան տարածության ենթատարածություն կազմված բոլոր $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$ կետերից: Ուստի $\mathbb{R}^n$-ի մետրիկային տոպոլոգիան համընկնում է $\mathbb{R}^n$-ի վրա $\mathbb{R}^{n+1}$-ի մետրիկային տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայի հետ: Նկատենք, որ $\mathbb{R}^n$-ը փակ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}^{n+1}$-ում (ինչո՞ւ): Ուստի (համաձայն փակ ենթաբազմության վերաբերյալ թեորեմ 1-ի նմանակ թեորեմի), $\mathbb{R}^n$-ի փակ ենթաբազմությունները փակ են նաև $\mathbb{R}^{n+1}$-ում: Մինչդեռ $\mathbb{R}^n$-ում բաց, ոչ դատարկ որևէ ենթաբազմություն չի կարող լինել բաց ենթաբազմություն նաև $\mathbb{R}^{n+1}$-ում: Ընթերցողին առաջարկում ենք որպես խնդիր ապացուցել այդ պնդումը, պարզության համար սկսելով $n = 1, 2$ տեսանելի դեպքում:

Դիտողություն: $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածությունների փակ ենթատարածությունների օրինակ 6-ում ref? բերված հատկությունը թույլ է տալիս սահմանել $\mathbb{R}^\infty$ բազմությունը և նրա վրա հատուկ տոպոլոգիա:

Սահմանենք $\mathbb{R}^\infty$ բազմությունը որպես $\mathbb{R}^1 \cup \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^3 \cup \dots$ բազմության ֆակտոր-բազմություն կատարելով նրա տարրերի

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0) = \dots$$

տեսքի նույնացումներ ամեն մի բնական n թվի և իրական թվերի ամեն մի $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ հաջորդականության համար: Թույլ տալով մեզ որոշ ազատություն կարող ենք համարել, որ $\mathbb{R}^\infty$-ը իրական թվերից կազմված բոլոր անվերջ $(x_1, x_2, \dots)$ հաջորդականությունների բազմությունն է, որոնց անդամները սկսած որոշ տեղից զրոներ են: Ստանդարտ եղանակով $\mathbb{R}^\infty$-ը վերածվում է անվերջ չափանի իրական գծային տարածության հաջորդականությունների անդամ առ անդամ գումարման և թվով բազմապատկման գործողություններով: Սահմանենք տոպոլոգիա $\mathbb{R}^\infty$-ի վրա համարելով փակ ամեն մի $F \subset \mathbb{R}^\infty$ ենթաբազմություն այն և միայն այն դեպքում, երբ ամեն մի n-ի դեպքում փակ է $F \cap \mathbb{R}^n$ հատումը: Տոպոլոգիայի F1-F3 աքսիոմները ստուգվում են հեշտությամբ:

$\mathbb{R}^\infty$-ում կարելի է սահմանել տոպոլոգիա ուրիշ եղանակով՝ վերածելով $\mathbb{R}^\infty$-ը մետրիկական տարածության $(\rho(x, y))^2 = \sum_{i \geq 1} (x_i - y_i)^2$ մետրիկով:

Նշենք, որ $\mathbb{R}^\infty$-ի այս երկու տոպոլոգիաները համարժեք չեն, քանի որ, օրինակ

$$A = \{(1, 0, 0, \dots), (0, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), (0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots), \dots\}$$

ենթաբազմությունը ակնհայտորեն փակ է $\mathbb{R}^\infty$-ի առաջին տոպոլոգիայում, բայց փակ չէ երկրորդ տոպոլոգիայում: Իրոք, $O = (0, 0, 0, \dots)$ կետի ցանկացած ε-շրջակայք ունի ոչ դատարկ հատում A-ի հետ, բայց O-ն չի պատկանում A-ին (**հիմնավորե՛ք**):

Սահմանվում է $\mathbb{R}^\infty$ բազմություն և նրա վրա տոպոլոգիա ևս մի եղանակով. այս դեպքում $\mathbb{R}^\infty$-ի տարրեր են համարվում բոլոր $(x_1, x_2, \dots)$ տեսքի հաջորդականությունները, պայմանով որ զուգամիտում է $\sum_{i=1}^\infty x_i^2$ շարքը: Այս դեպքում նույնպես $\mathbb{R}^\infty$-ը վերածվում է մետրիկական տարածության, որը նշանակվում է l_2-ով և կոչվում է հիլբերտյան տարածություն (մանրամասները տես [ ]-ում): zut [] toghenq?

Այժմ ներկայացնենք մակածված տոպոլոգիա և ենթատարածություն հասկացություններին

առնչվող մի քանի պարզ և հաճախ կիրառվող փաստեր:

Լեմմա: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն և որևէ ոչ դատարկ $A \subset X$ ենթաբազմություն: Դիտարկենք $i : A \to X,\ i(a) = a$ ներդրումը: Ապա $i : (A, \tau_A) \to (X, \tau)$ արտապատկերումը անընդհատ է:

Ապացուցում: Իրոք, եթե $U \in \tau$, ապա $i^{-1}(U) = U \cap A \in \tau_A$: ■

Նկատենք, որ τ_A-ն այն ամենաթույլ տոպոլոգիան է A-ի վրա, որի դեպքում i արտապատկերումը անընդհատ է (հիմնավորե՛ք):

Եթե ունենք $f : X \to Y$ արտապատկերում և $A \subset X$ ենթաբազմություն, ապա $f_A : A \to Y,\ f_A(a) = f(a),\ a \in A$ արտապատկերումը կոչվում է f **արտապատկերման սահմանափակում** A ենթաբազմության վրա: Նկատենք, որ $f_A = f \circ i$, որտեղ $i : A \to X$ արտապատկերումը A ենթաբազմության ներդրումն է X-ի մեջ՝ $i(a) = a$, $\forall\, a \in A$:

Թեորեմ 2: Եթե տոպոլոգիական տարածությունների $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ արտապատկերումը անընդհատ է, ապա $\forall\, A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում f արտապատկերման $f_A : (A, \tau_A) \to (Y, \sigma)$ սահմանափակումը անընդհատ է:

Ապացուցում: Շնորհիվ լեմմայի f_A-ն անընդհատ է որպես i և f անընդհատ արտապատկերումների համադրույթ: ■

Հաճախ դիտարկվում է նաև հակառակ խնդիրը. պահանջվում է X-ի A ենթաբազմության վրա տրված $g : A \to Y$ անընդհատ արտապատկերումը շարունակել մինչև $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերում: Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում խնդիրը լուծում չունի (անընդհատ շարունակում կարող է գոյություն չունենալ):

Երբեմն անհրաժեշտություն է առաջանում տրված երկու անընդհատ արտապատկերումներից «կարել» կամ «սոսնձել» մի երրորդ անընդհատ արտապատկերում: Բերենք այդպիսի հնարավորության օրինակ:

Թեորեմ 3: Դիցուք ունենք X և Y տոպոլոգիական տարածություններ, ընդ որում $X = A \cup B$, որտեղ A-ն և B-ն փակ ենթաբազմություններ են X-ում: Դիցուք $f : A \to Y$ և $g : B \to Y$ անընդհատ արտապատկերումներն այնպիսին են, որ $f(x) = g(x)$ ցանկացած $x \in A \cap B$ կետում: Դիտարկենք $h : X \to Y$ արտապատկերումը, որտեղ $h(x) = f(x)$, երբ $x \in A$ և $h(x) = g(x)$, երբ $x \in B$: Ապա h արտապատկերումը անընդհատ է:

Ապացուցում: Նախ պարզ է, որ h-ը սահմանված է կոռեկտ: Դիցուք F-ը կամայական փակ բազմություն է Y-ում: Ունենք՝

$$h^{-1}(F) = h^{-1}(F) \cap (A \cup B) = (h^{-1}(F) \cap A) \cup (h^{-1}(F) \cap B) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F):$$

Քանի որ F-ը փակ է Y-ում և f-ը անընդհատ է, ուստի $f^{-1}(F)$-ը փակ է A-ում: Հետևաբար $f^{-1}(F)$-ը փակ է նաև X-ում (այստեղ օգտվեցինք թեորեմ 1-ի նմանակից՝

հաշվի առնելով, որ A-ն փակ է X-ում): Նույնանման դատողություններով, $g^{-1}(F)$-ը ևս փակ է X-ում: Հետևաբար $h^{-1}(F)$-ը փակ է X-ում, ուստի h-ը անընդհատ է: ■

Վերը բերված 1-6 օրինակները ցույց են տալիս, որ տոպոլոգիական տարածություն ենթատարածություն հասկացությունը հնարավորություն է տալիս արդեն հայտնի տարածություններից ստանալ բազմաթիվ նոր տարածություններ դրանց ենթաբազմությունների տեսքով:

Վերլուծական երկրաչափություն դասընթացում կատարվում է 2-րդ կարգի կորերի և 2-րդ կարգի մակերևույթների մետրիկական և աֆինական դասակարգումներ:

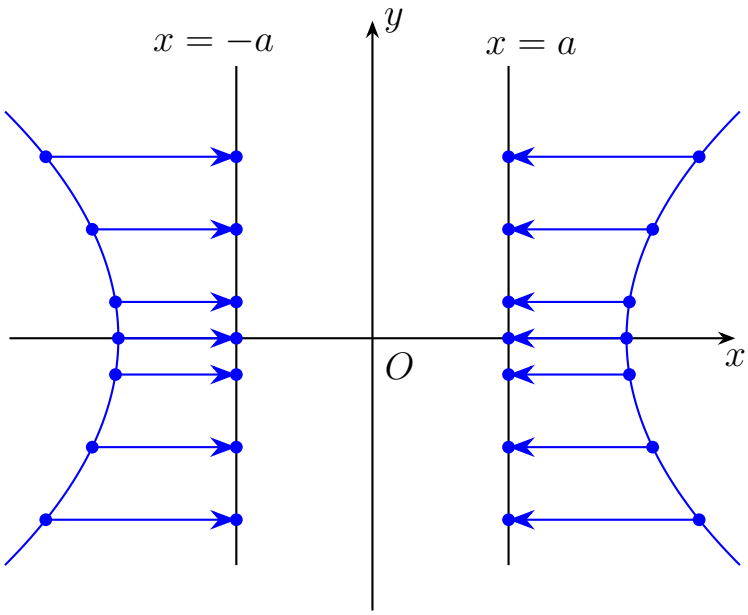
Յուրաքանչյուր 2-րդ կարգի կոր կարող ենք դիտել որպես տոպոլոգիական տարածություն, հարթության սովորական մետրիկական տոպոլոգիայից կորի վրա մակածված տոպոլոգիայով այնպես, ինչպես դա արված է օրինակ 3-ում շրջանագծի դեպքում: Իսկ յուրաքանչյուր 2-րդ կարգի մակերևույթ կարող ենք դիտել որպես տոպոլոգիական տարածություն $\mathbb{R}^3$ էվկլիդյան տարածության տոպոլոգիայից մակերևույթի վրա մակածված տոպոլոգիայով այնպես, ինչպես դա նկարագրված է օրինակ 4-ում սֆերայի դեպքում:

Առաջանում է խնդիր. կատարել 2-րդ կարգի կորերի և մակերևույթների **տոպոլոգիական դասակարգումներ**:

Քանի որ իզոմետրիկ և աֆինական ձևափոխությունները փոխմիարժեք և անընդհատ արտապատկերումներ են, ուստի միմյանց մետրիկորեն կամ աֆինորեն համարժեք ցանկացած երկու 2-րդ կարգի կոր կամ մակերևույթ նաև տոպոլոգիորեն համարժեք են (հոմեոմորֆ են):

Նկատենք, որ աֆինորեն ոչ համարժեք երկու կոր կամ մակերևույթ կարող են լինել տոպոլոգիորեն համարժեք: Օրինակ, ցանկացած հիպերբոլ հոմեոմորֆ է զուգահեռ իրական ուղիղների զույգի:

Իրոք, տեղադրելով հիպերբոլն ու ուղիղների զույգը միմյանց նկատմամբ հարմար դիրքով, կարող ենք զուգահեռ պրոյեկտել դրանցից մեկը մյուսի վրա ինչպես ցույց է տրված ստորև գծագրում:



Կորերի և մակերևույթների լիարժեք տոպոլոգիական դասակարգումը ենթադրում

է ոչ միայն հաստատել, որ տվյալ երկու կորը կամ մակերևույթը հոմեոմորֆ են, այլ նաև ցանկացած երկու կորի կամ մակերևույթի դեպքում հիմնավորել նրանց ոչ հոմեոմորֆությունը, եթե չի հաջողվում կառուցել հոմեոմորֆիզմ նրանց միջև: Օրինակ, ինչպես գիտենք, որևէ էլիպս աֆինորեն համարժեք չէ որևէ հիպերբոլի, քանի որ աֆինական ձևափոխությունները սահմանափակ պատկերները արտապատկերում են սահմանափակ պատկերների (էլիպսը սահմանափակ պատկեր է, հիպերբոլը՝ ոչ):

Աֆինական ձևափոխությունների այս հատկությունը կարելի է վերաձևակերպել նաև այսպես՝ պատկերի սահմանափակությունը (ինչպես նաև անսահմանափակությունը) աֆինական հատկություն է: Բայց (ինչպես դա հետևում է ստորև 12.6 խնդրից) պատկերի սահմանափակությունը չի հանդիսանում տոպոլոգիական հատկություն: Ուստի հիմնավորելու համար, որ էլիպսը և հիպերբոլը տոպոլոգիապես համարժեք չեն (հոմեոմորֆ չեն) անհրաժեշտ է գտնել պատկերների որևէ տոպոլոգիական հատկություն, որով օժտված լինի այդ պատկերներից միայն մեկը: Այդպիսի որոշ տոպոլոգիական հատկություններ կկառուցվեն հաջորդ թեմաներում:

Իսկ մենք այստեղ սահմանափակվենք նշելով, որ այնպիսի երկրաչափական հատկություններ կամ մեծություններ ինչպիսիք են՝ անկյուն, հեռավորություն, բազմանկյուն, երկարություն, մակերես, ծավալ չեն հանդիսանում տոպոլոգիական հատկություններ կամ տոպոլոգիական ինվարիանտներ:

Վերջում կանգ առնենք տոպոլոգիական տարածությունների այսպես կոչված ժառանգական հատկության հասկացության վրա: Ըստ սահմանման, տոպոլոգիական տարածության P հատկությունը կոչվում է **ժառանգական**, եթե այդ հատկությամբ օժտված ամեն մի տոպոլոգիական տարածության ցանկացած ենթատարածություն նույնպես օժտված է այդ հատկությամբ:

Տոպոլոգիական տարածությունների մեզ արդեն ծանոթ հատկություններից ժառանգական են անջատելիության $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ աքսիոմները, հաշվելիության I և II աքսիոմները, տարածության մետրացումը (հիմնավորումները, որպես խնդիրներ, թողնվում են ընթերցողին):

Ոչ ժառանգական հատկություններ են սեպարաբելությունը, լինդելյոֆությունը, կապակցվածությունը, գծային կապակցվածությունը, կոմպակտությունը: Վերջին երեք հասկացությունների հետ կծանոթանանք հաջորդ թեմաներում: